

DOI: 10.13849/j.issn.1006-6578.2024.02.032

基于一致理论的结构屈曲分析方法研究

钱若军¹, 袁行飞²

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 浙江大学 空间结构研究中心, 浙江 杭州 310058)

摘要: 在经典的结构理论研究的基础上, 讨论了多自由度体系结构屈曲分析的数值方法, 并给出了结构弹塑性、开裂和屈曲分析的一致理论, 按宏观、微观和传递分析过程根据平衡稳定性判断准则构成了结构系统稳定性分析的完整框架, 可用于工程结构的屈曲分析。

关键词: 一致理论; 屈曲分析; 强度极限准则; 平衡稳定性准则; 多米诺传递

中图分类号: TU311.2

文献标志码: A

文章编号: 1006-6578(2024)02-0032-06

Research of structural buckling analysis method based on consistency theory

QIAN Ruo-jun¹, YUAN Xing-fei²

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Space Structures Research Center, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: Based on the study of classical structural theory, the numerical method of buckling analysis of multi-degree-of-freedom system structures is discussed, and the consistent theory of elastic-plastic, cracking and buckling analysis of structures is proposed. According to the macro, micro and transfer analysis processes, the complete framework of stability analysis of structural systems is formed on the basis of criteria of equilibrium stability, which can be used for buckling analysis of engineering structures.

Key words: consistency theory; buckling analysis; strength limit criterion; equilibrium stability criterion; Domino transmission

近一百年来如冯·卡门、钱学森和柯以托等著名科学家对结构屈曲理论做出了具有里程碑式的贡献^[1-4], 他们的研究成果主要涉及: 结构屈曲的非线性理论, 系统势能函数的构造; 单参数系统的平衡图形和屈曲类型研究, 屈曲类型被归结为平衡分岔屈曲、极值点平衡屈曲、动态和颤振屈曲; 缺损敏感性准则, 单参数系统中初始缺损的描述、模型及其敏感性, 方程的线性化和多值问题的蜕化; 壳体经典临界荷载的缩减因子; 动力和颤动屈曲; 屈曲模态的耦合作用等。

经典的结构屈曲理论是多自由度结构体系屈曲

分析的理论支撑, 有限元法是结构体系屈曲分析的主要数值方法。注意到结构屈曲不是一种单一的力学行为, 而是与弹塑性、开裂等一致的行为, 在结构的静动力弹塑性、开裂和屈曲分析的一致理论框架内, 通过能量转换模式和强度极限即平衡稳定性判断, 在微观分析过程中给出了结构屈曲分析的完整过程。

论文首先介绍了屈曲模态和屈曲分析有限单元法, 接着提出了屈曲分析的一致理论, 给出了结构弹塑性、开裂和屈曲分析的一致公式, 按宏观、微观和传递分析过程根据平衡稳定性判断准则构成了结构

收稿日期: 2022-03-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51878600, 52278224).

作者简介: 钱若军(1946—), 男, 上海人, 学士, 教授, 主要从事结构工程研究. E-mail: prjq@163.com

系统稳定性分析的完整框架,可用于工程结构的屈曲分析。

1 屈曲模态的耦合作用

如果用屈曲模态的线性组合来构造屈曲位移,那么很容易发现,若存在模态耦合,那么屈曲位移将会被放大,文献[5,6]给出了两个例子.对于格构结构或网壳结构,可能发生节点之间杆件的局部屈曲,或仅发生节点失稳的整体屈曲,或两者都有的混合屈曲。

图1所示的格构柱可能发生局部屈曲、整体屈曲和混合屈曲.图1显示了格构柱最大承载力 P 与整体临界荷载和局部临界荷载比值 P_G/P_L 的关系,说明如果存在局部屈曲且局部临界荷载 P_L 小于可能发生的整体临界荷载 P_G ,那么在分析时可以不考虑整体屈曲。

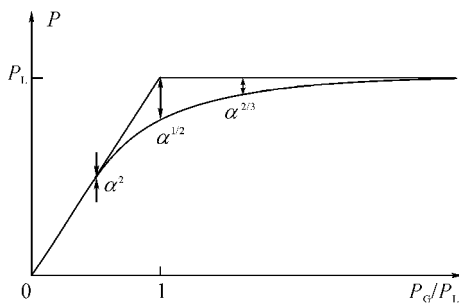


图1 格构柱承载力 P 与 P_G/P_L 的关系

Fig. 1 Relationship between Bearing Capacity of Lattice Column P and P_G/P_L

2 屈曲分析的有限单元法

2.1 单参数系统屈曲分析的基本方程

上世纪八十年代国内外学者将屈曲分析作为非线性有限元法中一个重要课题作了大量研究,最终集中于基于比例加载的自动增量过程。

结构屈曲分析的有限元基本方程为:

$$(\mathbf{k}_L + \mathbf{k}_\sigma) \Delta \mathbf{u}_e = \lambda \mathbf{p}_{\text{ref}} - \mathbf{f}_e \quad (1)$$

式中, $\mathbf{k}_L$ 、 $\mathbf{k}_\sigma$ 分别为结构单元的线刚度矩阵和初应力刚度矩阵, $\mathbf{k}_\sigma$ 反映了含有位移两阶量的应变的贡献; $\Delta \mathbf{u}_e$ 为单元节点位移向量; λ 为荷载参数; $\mathbf{p}_{\text{ref}}$ 为实际的多参数系统经加权平均后所构造的单参数系统的参考荷载向量; $\mathbf{f}_e$ 为节点力向量。

上式一般采用增量过程,按 Newton-Raphson 法进行求解。

2.2 临界荷载的确定

在第 i 个增量步中,式(1)的子迭代格式

$$(\mathbf{k}_L + \mathbf{k}_\sigma) \delta \mathbf{u}_e^i = \mathbf{k}_\sigma \delta \mathbf{u}_e^i = \delta \lambda^{j-1} \mathbf{p}_{\text{ref}} \quad (2)$$

解上式,如果不平衡力 $\|\mathbf{r}\| = \|\lambda \mathbf{p}_{\text{ref}} - \mathbf{f}_e\| \rightarrow \epsilon$ (一般 $< 1.0 \times 10^{-5}$),则子迭代收敛.于是更新节点位移、节点坐标,计算增量荷载水平 $\delta \lambda$ 。

如果当 $\delta \lambda \rightarrow 0$ 而

$$\delta \mathbf{u}_e^i = \mathbf{k}_L^{-1} \delta \lambda^{j-1} \mathbf{p}_{\text{ref}} \rightarrow \infty \quad (3)$$

则根据屈曲的定义有临界荷载:

$$\lambda_{\text{cr}} = \sum \Delta \lambda \quad (4)$$

如果式(3)存在,则有:

$$\det(\mathbf{k}_L) = 0. \quad (5)$$

2.3 自动增量过程

以上简单讨论的荷载增量过程是采用弹塑性分析模型在荷载位移空间中进行的迭代过程,得到的是位移解,力学模型不适用于屈曲位移的分析.式(2)也不适用于壳体屈曲时存在的不稳定平衡,即位移“跳跃”分析。

在式(2)的迭代过程中,凭经验选择 $\delta \lambda$ 很可能会越过临界点,于是进行了旨在自动确定 $\delta \lambda$ 的研究,弧长法则是由 Riks 和 Wemper 提出经 Crisfield 和 Ramm 改进的一种方法,文献[7]对弧长法作了详尽的讨论。

对于多自由度体系,刚度矩阵分解后,任意一个自由度方向的主元等于零时,式(5)和式(2)成立,显然与稳定性判断准则 $\delta^2 \pi = 0$ 不尽协调,一个自由度软化并不意味屈曲,但是按判断准则,要求所有自由度都软化才失去稳定也不太可能,因此,应该规避临界的概念,软化可以有程度上的差别.只有单自由度体系不存在软化程度,所以引入“临界”的概念不会引起概念模糊。

在经典理论的研究中,都是在初始状态建立的常系数方程进行分析,在有限元法中也应如此.但在增量过程中,一旦引入位移、应力、坐标更新,理论差别就显而易见了.“更新”是非线性理论的基本点,那么经典的屈曲理论的推广需极其慎重。

当在增量过程中达到临界点时,方程奇异,对奇异性的处理应遵循相应的数学原理,而采用增量过程所得“临界荷载”至今无法用试验证实。

2.4 线性临界荷载

在式(1)中,初始时刻 $\mathbf{k}_\sigma = 0$,所以有:

$$\mathbf{k}_L \Delta \mathbf{u}_e^0 = \mathbf{p}_{\text{ref}} \quad (6)$$

根据解 $\Delta \mathbf{u}_e^0$ 可得结构在 $\mathbf{p}_{\text{ref}}$ 作用下的应力,由此可

得 $\mathbf{p}_{\text{ref}}$ 作用下的初应力刚度矩阵 $\mathbf{k}_{\sigma}^{\text{ref}}$, 所以在增量荷载作用下并且在线刚度范围内, 有

$$(\mathbf{k}_L + \lambda \mathbf{k}_{\sigma}^{\text{ref}}) \Delta \mathbf{u}_e = \lambda \mathbf{p}_{\text{ref}} \quad (7)$$

在增量过程中, 线弹性刚度矩阵 $\mathbf{k}_L$ 是不变的, 而初应力刚度矩阵 $\mathbf{k}_{\sigma}^{\text{ref}}$ 则随增量荷载水平线性增加, 即

$$\mathbf{k}_{\sigma} = \lambda \mathbf{k}_{\sigma}^{\text{ref}} \quad (8)$$

这里, λ 为荷载水平或荷载系数。

于是, 式(7)的解为:

$$\Delta \mathbf{u}_e = (\mathbf{k}_L + \lambda \mathbf{k}_{\sigma}^{\text{ref}})^{-1} \lambda \mathbf{p}_{\text{ref}} \quad (9)$$

根据经典的结构屈曲定义, 如果结构屈曲, 则必然有: 当

$$\det(\mathbf{k}_L + \lambda \mathbf{k}_{\sigma}^{\text{ref}}) = 0 \quad (10)$$

时, 任意微小的外加扰动则使位移 $\Delta \mathbf{u}_e \rightarrow \infty$ 。

从上式(10)求得 λ 的最低值 λ_{cr} , 于是得到线性临界荷载

$$\mathbf{p}_{\text{cr}}^{\text{lin}} = \lambda_{\text{cr}} \mathbf{p}_{\text{ref}} \quad (11)$$

同样, 根据经典的结构屈曲定义, 可得式(7)的齐次式

$$(\mathbf{k}_L + \lambda \mathbf{k}_{\sigma}^{\text{ref}}) \phi = 0 \quad (12)$$

上式为特征方程, 可解得屈曲模态, λ 为特征值, ϕ 为特征向量。由此可得与式(11)相同的线性临界荷载。

2.5 网壳结构的稳定性分析

对于网壳结构, 宜分别对网壳结构每个杆件再剖分为 2 至 6 个或更多单元, 按式(11)求得局部失稳的线性临界荷载 $\mathbf{p}_{\text{cr}}^L$, 又将每个杆件作为一个单元, 同样按式(11)计算节点失稳的线性临界荷载 $\mathbf{p}_{\text{cr}}^G$ 。如果 $\mathbf{p}_{\text{cr}}^L < \mathbf{p}_{\text{cr}}^G$, 则无需对该网壳进行非线性稳定分析^[6]。

网壳结构的初始几何缺陷主要考虑杆件长度的偏差、杆件的初始扰度和杆件的初始弯折。这些缺陷可分别用初应变来表示, 将以上由于初应变而造成的影响作为荷载求出各单元节点的位移及节点力向量^[7]。一般初始小缺损对网壳结构承载力的影响并不大。

对于正三角形球面网壳可采用经典理论求得线性临界荷载, 然后乘以缩减系数, 得非线性临界荷载^[7]。美国 Temcor 体系采用弹塑性有限元法分析和设计, 但采用美国规范所引用的布彻特(Buchert)公式

$$\mathbf{p}_{\text{cr}}^{\text{low}} = 0.365 \mathbf{p}_{\text{cr}}^{\text{lin}} \quad (13)$$

控制临界荷载, 应该强调缩减系数必须有理论和试验依据。

3 屈曲分析的一致理论

3.1 一致理论

经典的弹塑性理论、稳定理论和结构动力学等在各自涉及的理论范畴内研究了结构中力的平衡和变形规律, 以及结构行为的分析方法, 但是更多的事实说明, 不同原因导致的力学行为包括破坏, 都不是一个单一的过程而是一种并发过程, 于是需要综合经典理论对结构的宏观响应作微观的分析。

结构分析的一致理论包括: 时空系 $(t, \mathbf{x})$ 的建立, 结构系统的变形、物性及物理关系的定义及描述, 系统的行为及等价的能量转换, 系统能量转换的永恒性^[8]。

在任意物理过程 $[\tau + \Delta\tau]$ 中, 时刻 $t (\tau \leq t \leq \tau + \Delta\tau)$ 时, 理论给出的结构材料的物性方程:

$${}^t E(\mathbf{x}, \sigma, T) = {}^t \xi {}^{\tau} E(\mathbf{x}, \sigma, T) {}^{\tau} \phi_E(\mathbf{x}, \sigma) \quad (14)$$

这里, ${}^t E(\mathbf{x}, \sigma, T)$ 为物理过程的起始时刻的弹性模量; ${}^{\tau} \phi_E(\mathbf{x}, \sigma)$ 为 τ 时刻的模量函数, 也就是弹性模量的修正系数, 可假设为三次曲线模式; ${}^t \xi$ 反映了材料的时效, 现假定 ${}^t \xi = e^{-2\pi(\omega_1 f_p + \omega_2 f_1)(t-\tau)}$ 。物性方程反映了材料在受拉和受压状态时在作用力变化的情况下材料弹性模量的时效。

理论给出的结构单元静动力弹塑性和屈曲分析的一致公式为:

$$({}^{\tau} \mathbf{m}_D \mu_m + {}^{\tau} \mathbf{c}_D \mu_c + (1 + f_D) {}^{\tau} \mathbf{k}_L + {}^{\tau} \mathbf{k}_{\sigma}) \Delta {}^t \mathbf{u}_e = {}^t \mathbf{p}_e (1 + f_P) - {}^{\tau} \mathbf{f}_e \quad (15)$$

这里 ${}^{\tau} \mathbf{k}_L$ 、 ${}^{\tau} \mathbf{k}_{\sigma}$ 分别为结构的弹性和初应力刚度矩阵; ${}^{\tau} \mathbf{m}_D$ 、 ${}^{\tau} \mathbf{c}_D$ 分别为结构的质量和阻尼矩阵; f_D 、 f_P 分别为结构位移和作用的动力放大系数; μ_m 、 μ_c 分别为与作用频率和结构自振频率有关的系数; ${}^{\tau} \mathbf{f}_e$ 为等效结点力向量。对于静力问题, $f_D = f_P = \mu_m = \mu_c = 0$ 。

理论给出的结构单元高斯点的静动力弹塑性开展、破断和屈曲分析的一致公式为:

$$\Delta {}^t e = \Delta {}^t w \quad (16)$$

这里 $\Delta {}^t e$ 、 $\Delta {}^t w$ 分别为单元高斯点的应变能和外力功密度, 弹塑性变形、开裂、屈曲等价于能量转换。

理论给出的结构单元高斯点的静动力弹塑性或破断或屈曲的传递的一致公式为:

$$(1 + f_D) {}^2 \mathbf{k} \delta {}^t \mathbf{u}_e = -\delta {}^t \mathbf{f}_e \quad (17)$$

在物理过程 $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ 内, 单元高斯点上的能量转换直至守恒的过程等价于结构的力学行为。

3.2 结构屈曲的定义

通常屈曲易发生在处于受压状态的薄壁结构,

如压杆、拱或薄壳,也可能发生在梁、板等结构的受压区。在屈曲前,结构受压区内部约束退化形成几何软化区,在任意微小干扰下软化区结构发生屈曲,结构局部的塑性变形、开裂和屈曲是几何软化的一致行为,是能量转换的过程和结果。当弹、塑性应变能已处于极限,外力功不能转换为应变能,部分外力在弹性位移上做的功转化为外力在几何位移上做的功。由此,结构的屈曲可定义是应变能转换为外力在几何位移上做功的过程。当应变能密度处于极值时,结构高斯点处于屈曲的临界状态。随着几何软化区的扩大屈曲传递,由局部屈曲传递形成整体屈曲。

3.3 分析过程简述

按一致理论,无论对结构进行弹塑性、开裂及屈曲分析,均按式(14)~式(17)的过程进行。

解式(15),得结构单元内高斯点 $(\mathbf{x})$ 的弹性预测值 $\Delta \mathbf{u}_B$ 、 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_B$ 、 $\Delta \boldsymbol{\sigma}_B$,由此可算得等效外力功密度:

$$\Delta'w = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_B^T \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_B^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_B \quad (18)$$

然后按式(16)考虑外力功转换为应变能的过程,

$$\Delta'e = (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_e)^T \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_e)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_e) = \Delta'w \quad (19)$$

式中, $\mathbf{D}$ 为反映应力和应变全量的微分关系的模量矩阵,一般应试验确定。但上式宜用增量形式的渐近能量转换公式来表示,即:

$$\Delta'e = \sum_{j=1} ((\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^j \boldsymbol{\sigma}^{j-1} + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^j \mathbf{D}^{j-1} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^j) - \lambda_j \Delta w) \quad (20)$$

这里, λ_j 为外力功密度水平参数; $\mathbf{D}^{j-1}$ 为反映应力和应变增量的微分关系的模量矩阵,在当前物理过程内可解释为按线性或二次或三次曲线规律变化。

解上式后,可求得 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$,即:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{j=1} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^j \quad (21)$$

在这个能量转换过程中,需经过弹性极限准则判断、强度极限准则判断以及应变能极限准则判断,尤其是后者,当点 $(\mathbf{x})$ 的应变能密度处于极限状态,则部分外力功无法转换成应变能,那么可能因材料破断而释放,也可能改变几何,以外力在几何位移做功的形式释放。由此引起能量不守恒则按式(17)进行多米诺传递分析。

3.4 结构受压区屈曲的条件

结构发生屈曲至关重要的条件是内部约束退化。约束退化的原因是局部材料的破断,破断起始于塑性极限也即强度极限。

对于处于平面应力状态的壳体或梁板受压区,

引入体积不可压假定:

$$\nabla \cdot \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (22)$$

于是有侧平面应变:

$$\Delta \varepsilon_z = -\nu \Delta \varepsilon_x - \nu \Delta \varepsilon_y \quad (23)$$

这表明即使在板壳的受压区,在面内压应力的挤压下会发生侧平面变形,于是也存在侧平面拉应力 σ_z 。在按式(20)的渐进过程中,按强度极限准则判断,若

$$\frac{\partial \Delta'e}{\partial \Delta' \varepsilon_{ij}} = 0 \quad (24)$$

成立,该点 $(\mathbf{x})$ 的应变能密度处于极限状态,且如该点 $(\mathbf{x})$ 应力强度 $\sigma_i(\mathbf{x}) > f_u$,那么处于受压状态的板壳表面将会开裂,于是削弱了截面厚度和抗弯刚度,使结构内部约束退化,形成发生屈曲的条件。以上判断是在式(19)能量转换的渐近过程中进行的。

3.5 结构平衡稳定性极限判断准则

在满足屈曲条件后,结构发生屈曲至关重要的原因是材料的刚化,也就是材料不再可能发生弹塑性变形,屈曲起始于平衡稳定性极限。

对于处于平面应力状态的壳体或梁板受压区,在按式(20)的渐进过程中,按结构平衡稳定性极限准则判断,若

$$\frac{\partial \Delta'e}{\partial \Delta' \sigma_{ij}} = 0 \quad (25)$$

成立,该点 $(\mathbf{x})$ 的应变能密度处于极限状态,并且该点 $(\mathbf{x})$ 应力强度 $\sigma_i \leq f_u$,则中止求解式(20),梁柱或板壳受压区该点 $(\mathbf{x})$ 几何软化,处于屈曲的临界状态,即可能发生正交于压应力平面的几何位移,相应的应变能密度为屈曲临界应变能密度,即 $e_{cr} = e_e + \Delta'e$,上式(25)等价于 $\Delta \varepsilon_x^j = 0, \Delta \varepsilon_y^j = 0$ 。

式(25)为结构平衡稳定性极限判断准则,也是结构屈曲判断准则,也是极限应变能密度判断准则。

3.6 屈曲位移

结构发生屈曲应用屈曲位移来度量 and 表示,所以屈曲分析应包括式(24)、(25)的屈曲判断和屈曲位移的计算^[7]。

高斯点 $(\mathbf{x})$ 因开裂而软化且使内部约束退化,有限个刚度退化的高斯点之间形成软化区。与此同时,高斯点的应变能处于极限状态,则有 $\Delta \varepsilon_{ij} = 0$,该点刚化,于是软化区的高斯点形成屈曲域,图2,图3为屈曲域的计算网格图,图中三角形网格节点为高斯点,黑点是屈曲域的边界点,网格中的链杆为刚性杆。高斯点上作用极限应变能的等效节点力,在与边界点的挤压共同作用下,该软化区发生屈曲,软化区

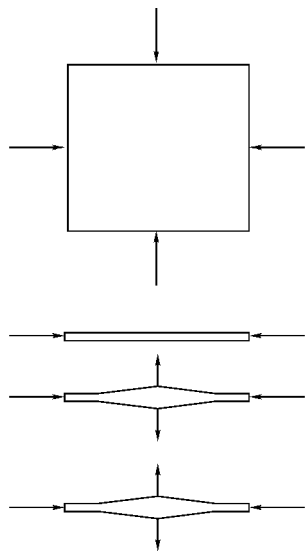


图2 屈曲域示意图

Fig. 2 Schematic diagram of buckling domain

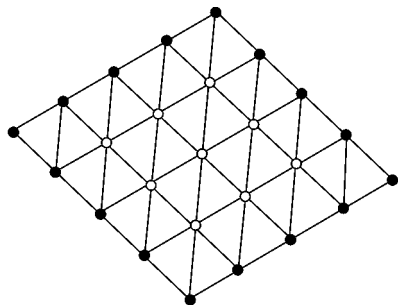


图3 屈曲域网格

Fig. 3 Grid of buckling domain

的屈曲是用高斯点的屈曲位移来表示的.

高斯点的屈曲位移控制方程为:

$$\mathbf{u}_b^T \mathbf{f}_b = 0 \quad (26)$$

式中, $\mathbf{u}_b$ 为高斯点的屈曲位移即几何位移, 它度量了结构屈曲后几何形状的改变; $\mathbf{f}_b$ 为高斯点之间铰接链杆的内力, 等于应变能的等效节点力. 该等效力的面内分量, 如板壳为面内薄膜力而如梁柱为轴向力.

引入软化区边界的强迫位移, 包括物理过程中产生的弹塑性位移, 解上式, 得屈曲位移 $\mathbf{u}_b^{[7]}$. 该式表示, 软化区因面内挤压产生的强迫位移和面内压力作用, 使高斯点产生正交于面内压力的屈曲位移即几何位移, 屈曲后软化区应变能耗散. 式(26)是一个多值问题, 有多重解, 求解过程是一个正交过程, 必须引入约束条件尤其是几何协调条件, 链杆长度在屈曲前后保持不变, 引入约束条件后使多值问题退化为单值问题. 屈曲起始于应变能临界点而不是荷载的临界点.

图4显示了二杆体系在对边界节点施加强迫位移后体系的几何位移, 采用SVD解得系统运动轨迹及其稳定位置. 图5为强迫位移下运动轨迹图, 图6为节点的运动轨迹图. 表1为几何稳定形态下的节点坐标.

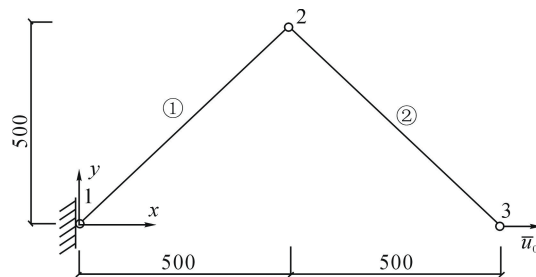


图4 平面体系

Fig. 4 Plane system

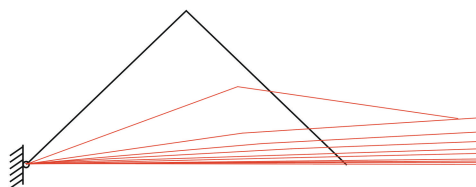


图5 强迫位移下运动轨迹

Fig. 5 Motion trajectory under forced displacement

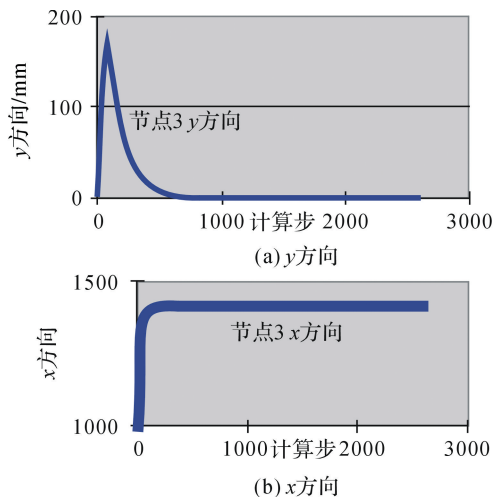


图6 节点的运动轨迹

Fig. 6 Motion trajectory of nodes

3.7 屈曲的传递

在按式(15)的整体分析和按式(16)高斯点上的局部分析后, 如果存在由不守恒趋于守恒过程的能量耗散后, 则在当前物理过程内应按式(17)进行传递分析. 传递是由不平衡力驱动的, 传递的结果可能使弹塑性变形、裂缝和屈曲进一步发展, 屈曲的传递

表 1 几何稳定形态下节点坐标
Table 1 Node coordinates in geometrically stable form

节点号	2(x,y)	误差%	2(x,y)	误差%
初始位形	(500.000, 500.000),长度 707.107		(1000.000, 0.000),长度 707.107	
最终位形	(707.123, 0.000),长度 707.123	0.002	(1414.256, 0.000),长度 707.133	0.004

使屈曲从局部区域发展到“整体”区域,直至不平衡力消除,其过程是在式(16)中完成。

局部屈曲和整体屈曲与局部受力和整体受力是两个完全不同的概念和范畴,屈曲分析应该是从高斯点的平衡失稳开始,经传递后形成一个整体屈曲区域,使结构改变几何后重新获得稳定为止。屈曲过程不发生任何卸载,由于屈曲的全过程可能在一个物理过程内完成,也可能在两个或多个相继的物理过程内完成,因此不对临界荷载作出规定和定义。

小 结

经典的屈曲分析理论是多自由度大型结构屈曲的基础,在多自由度体系的屈曲分析中必然采用数值方法如有限元法,在工程设计中经典理论应与数值方法融合。

结构屈曲不是一种单一的力学行为,而是与弹性、开裂等材料软化的一致行为。结构分析的“一致理论”可以解释结构屈曲的机理,并给出完整的分析方法,可用于工程结构的屈曲分析中。

参考文献

[1] 铁摩辛柯. 弹性稳定理论[M]. 北京:科学出版社,1958: 49-136.
TIMOSHENKO S. Theory of elastic stability [M]. Beijing: Science Press, 1958: 49-196.

(上接第 46 页)

[6] LU H N, ZHANG H G, MA K J. Experimental and numerical study of the flexural capacity of reinforced concrete vierendeel beams [J]. The Structural Design of Tall and Special Buildings, 2022, 31(3): 1-20.
[7] 高博青,董石麟. 折板式网壳结构的动力性能分析[J]. 建筑结构学报, 2002,23(1): 53-57.
GAO Bo-qing, DONG Shi-lin. Dynamic performance analysis of folded plate type latticed shell [J]. Journal of Building Structures, 2002, 23(1): 53-57.
[8] 朱锐,张华刚. 斜放网格棱柱面密肋折板网壳的静力特性分析[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2019, 44(5): 1296-1308.
ZHU Rui, ZHANG Hua-gang. Static characteristics and parametric analysis of folded-plated ribbed shells with inclined grid cylindrical surfaces [J]. Journal of Guangxi University (Natural Science Edition), 2019, 44 (5): 1296-1308.
[9] 苗峰. 某复杂双层折板网壳的动力分析研究[J]. 钢结构, 2016,31(4): 35-38.

[2] BAZANT Z P, CEDOLIN L. Stability of structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories [M]. New York Oxford, Oxford University Press, 1991: 3-129.
[3] MEHDI F. Stability of structures [M]. Elsevier,1994: 9-54.
[4] HUSEYIN K. Nonlinear theory of elastic stability [M]. Noordhofe International Publishing House Leyden, 1975: 3-56.
[5] 钱若军,袁行飞,谭元莉. 结构屈曲分析理论和方法 [M]. 南京:东南大学出版社,2017: 63-68.
QIAN Ruo-jun, YUAN Xing-fei, TAN Yuan-li. Theory and method of structural buckling analysis [M]. Nanjing: Southeast University Press, 2017: 63-68.
[6] 尹德玉,刘善维,钱若军. 网壳结构设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社,1996: 187-236.
YIN De-yu, LIU Shan-wei, QIAN Ruo-jun. Structural design of reticulated shells [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1996: 187-236.
[7] 钱若军,袁行飞,林智斌. 固体和结构分析理论及有限元法[M]. 南京:东南大学出版社,2013: 527-535.
QIAN Ruo-jun, YUAN Xing-fei, LING Zhi-bin. Solid and structural analysis theory and finite element method [M]. Nanjing: Southeast University Press, 2013: 527-535.
[8] 谭元莉,钱若军. 结构弹塑性和屈曲分析一致理论研究 [C]//中国钢结构协会结构稳定与疲劳分会第 17 届 (ISSF-2020)学术交流会,西安,2020. 8: 27-31.

MIAO Feng. Dynamic study on a complicated double-layer folded plate latticed shell[J]. Steel Construction, 2016,31(4): 35-38.
[10] 周家伟,郑晓清,董石麟. 折线形双曲扁网壳的构形和稳定性能分析[J]. 空间结构,2019,25(2): 20-24.
ZHOU Jia-wei, ZHENG Xiao-qing, DONG Shi-lin. Configuration and stability analysis on folded shallow latticed shells [J]. Spatial Structures, 2019, 25(2): 20-24.
[11] DONG X, ZHU M L, DONG S L. Analysis of dynamic characteristics and seismic response of single-layer folded-plane reticulated shells [J]. Spatial Structures, 2018, 24(2): 92-96.
[12] 姜腾钊. 行波效应下混凝土 V 形折板网壳地震响应分析 [J]. 广西大学学报(自然科学版), 2021,46(3): 517-525.
JIANG Teng-zhao. Analysis of seismic response of concrete bidirectional folded-plate reticulated shell structure under traveling wave effect [J]. Journal of Guangxi University (Natural Science Edition), 2021, 46(3): 517-525.